Γραμμική Άλγεβρα 1 6/10/15

Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

π.χ. $5x+5y+8z=2$
$x-y+9z=4$
$x+y-10z=1$
$5x-y+8z=0$ με $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Μη γραμμικό
$x^2+y^2+z^2=1$
$x-y+z=0$

ΣΩΜΑΤΑ

Παράδειγμα/Ορισμός: Θεωρούμε το $(\mathbb{R},+,\cdot)$

i) Η πρόσθεση (+) είναι: Δ1. μεταθετική $x+y=y+x$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Δ2. προσεταιριστική $(x+y)+z=x+(y+z)$ $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$

π.χ. $(2+3)+5=10$, $2+(3+5)=2+8=10$

Δ3. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο 0, ώστε $x+0=0$

Δ4. Κάθε στοιχείο $x\in\mathbb{R}$ έχει αντίθετο ως προς την πρόσθεση, δηλ. αν $x\in\mathbb{R}$ υπάρχει $y\in\mathbb{R}$ ώστε $x+y=y+x=0$ π.χ. αν $x=-\pi$ τότε $y=+\pi$

ii) Ο πολλαπλασιασμός (·) είναι: Δ5 μεταθετική, $x\cdot y=y\cdot x$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Δ6 Προσεταιριστική, $x(y\cdot z)=(x\cdot y)z$ για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$

Δ7. Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο $1\in\mathbb{R}$, ώστε $1\cdot x=x\cdot 1=x$, $x\in\mathbb{R}$

Δ8. Αν $x\in\mathbb{R}$ με $x\neq 0$ τότε υπάρχει αντίθετο ως προς τον πολλαπλασιασμό, λέγεται αντίστροφο του x και συμβολίζεται x^{-1} ή $\frac{1}{x}$

Δ9. Επιμεριστικότητα: $x\cdot(y+z)=xy+xz$
$(x+y)\cdot z=xz+y\cdot z$ για κάθε $x,y,z\in\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}=\{\dots-3,-2,-1,0,1,2,3\dots\}$

Στο $\mathbb{Z}$ η ιδιότητα Δ8 δεν ισχύει για $x\neq-1$ και $x\neq 1$

Ορισμός: Ένα σύνολο $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ λέγεται σώμα αν $|\mathbb{F}|^{*} \geq 2$ (δηλ. το $\mathbb{F}$ έχει τουλάχιστον 2 στοιχεία) και ισχύουν οι ιδιότητες 1-9
π.χ. Αν $\mathbb{F}$ είναι $\mathbb{R}$ ικανοποιούνται, άρα το $\mathbb{R}$ είναι σώμα
Το $\mathbb{Q}(+,\cdot)$ είναι σώμα
Το $\mathbb{C}(+,\cdot)$ είναι σώμα
Το $\mathbb{Z}(+)$ δεν είναι σώμα

* $|F|$ -> αριθμός στοιχείων του F
Μοναδικότητα αντιθέτου ως προς πρόσθεση:
Έστω ότι $x+y=0$ κ' $x+y'=0$ θα δ.ο $y=y'$
Απόδειξη: $y=0+y=(x+y')+y=(y'+x)+y=y'+(x+y)=y'+0=y' \Leftrightarrow y=y'$

Πρόταση: Έστω $(F,+,\cdot)$ σώμα και $x,y,z \in F$. Αν $x+y=x+z$ τότε $y=z$
Απόδειξη: Από αξιώματα σώματος, υπάρχει $x' \in F$ με $x'+x=x+x'=0$ τότε
$x+y=x+z \Rightarrow x'+(x+y)=x'+(x+z) \overset{\text{προσ}}{\Rightarrow} (x'+x)+y=(x'+x)+z \Rightarrow 0+y=0+z \Rightarrow$
$y=z$

Πρόταση: Έστω $(F,+,\cdot)$ σώμα τότε $0\cdot x=0$ για κάθε $x \in R$
Απόδειξη: $0x+0=0x=(0+0)x \overset{\Delta y}{=} 0x+0x$
Άρα από την προηγούμενη πρόταση $0x=0$

Συμβολισμός: Αν $(F,+,\cdot)$ συμβολίζουμε $0_F=0$ και $1_F=1$
Πρόταση: Αν $(F,+,\cdot)$ σώμα τότε $1_F \neq 0_F$
Απόδ. απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε $1_F=0_F$ και θα καταλήξουμε σε αντίφαση. Αφού $|F|\geq 2$ υπάρχει $x \in F$ με $x \neq 0_F$ από υπόθεση)
Έχουμε από τις ιδιότητες 1-9, $x=1_F x=0_F\cdot x=0_F$, αντίφαση γιατί $x \neq 0_F$

Παραδείγματα σωμάτων: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$, υπάρχουν πολλά ακόμη
Ερώτημα: Υπάρχουν σώματα F με το σύνολο F πεπερασμένο *1
Απάντηση: Ναι αν ο αριθμός στοιχείων του F είναι δύναμη πρώτου αριθμού
π.χ. ναι για $|F|=2,3,5,2^2,5,7,7^3,9=3^2$

Όχι, διαφορετικά, δηλαδή όχι αν |F| διαιρείται από δύο ή περισσότερους διαφορετικούς πρώτους π.χ. δεν υπάρχει σώμα με $6^{2\,3}$ στοιχεία

* Δηλαδή ναι αν υπάρχει πρώτος P και $n \geq 1$ ώστε $|F| = p^n$

Σώμα με 2 στοιχεία.

$F = \{0_F, 1_F\}$ πράξεις: • $0_F + 0_F = 0_F$ κ' $0_F + 1_F = 1_F$ κ' $0_F 1_F = 0_F$

• $0_F \cdot 0_F = 0_F$ κ' $0_F \cdot 1_F = 0_F$ $1_F \cdot 1_F = 1_F$

$0_F + 1_F = 1_F$ κ' $1_F + 1_F = 0_F$

Σε ένα σώμα με δύο στοιχεία ισχύουν τα εξής

Αντίστροφα οι ιδιότητες 1-4 και έχω με δύο στοιχεία

Ορισμός: Έστω $F = \mathbb{R}$ ή $F = \mathbb{C}$ ή γενικό F σώμα και $v, \mu \geq 1$ ακέραιοι. Ένας $v \times \mu$ πίνακας A με στοιχεία στο σώμα F είναι ο $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \cdots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \\ \alpha_{v1} & \alpha_{v2} & \alpha_{v\mu} \end{pmatrix}$ όπου $\alpha_{ij} \in F$ για $1 \leq i \leq v$ κ' $1 \leq j \leq \mu$

Παράδειγμα: Έστω $F = \mathbb{R}$, Ένας 1×2 πίνακας με στοιχεία στο F είναι ο $(1, 3)$

Ένας 2×1 πίνακας είναι ο $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Ένας 3×2 πίνακας είναι ο $C = \begin{pmatrix} \pi & \pi+1 \\ \frac{3}{2} & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ο $D = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ είναι 2×4

Παρατήρηση: Ένας δεύτερος συμβολισμός για πίνακες είναι ο $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Συμβολισμός: Συμβολίζουμε με $F^{\nu \times \mu}$ το σύνολο όλων $\nu\mu$ πινάκων με στοιχεία στο σώμα F. Για παράδειγμα $Q^{2\times2}$ είναι το σύνολο 2×2 πινάκων με στοιχεία στο Q. Έχουμε $[1,3,5] \notin Q^{2\times2}$ γιατί είναι 1×3 πίνακας και $\begin{bmatrix} 3 & \sqrt{2} \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \notin Q^{2\times2}$ γιατί $\sqrt{2} \notin Q$. Ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \in Q^{2\times2}$$

Συμβολισμός: Γράφουμε $A=(\alpha_{ij})_{\nu\mu} \in F^{\nu\mu}$ αν ο A είναι $\nu\times\mu$ πίνακας και το (i,j) στοιχείο του A, για $1 \le i \le \nu$, $1 \le j \le \mu$ είναι ίσο με $\alpha_{ij} \in F$

π.χ. Ο 2×2 πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ γράφεται και ως $A=(\alpha_{ij})_{2\times2}$ με $\alpha_{ij}=i+j$

π.χ. Ποιος είναι ο πίνακας $A=(\alpha_{ij})_{1\times3}$ με $\alpha_{ij}=j^2$

$$[a_{11} \ \alpha_{12} \ \alpha_{13}] = [1 \ 4 \ 9]$$

Έστω $A=(a_{ij})_{\nu\times\mu} \in F^{\nu\times\mu}$ $B=(b_{ij})_{\nu'\times\mu'} \in F^{\nu'\times\mu'}$

Οι πίνακες A, B λέγονται ίσοι αν $\nu=\nu'$ (δηλ. έχουν ίσιο αριθμό γραμμών) και $\mu=\mu'$ (δηλ. έχουν ίσο αριθμό στηλών) και επιπλέον $\alpha_{ij}=b_{ij}$ για κάθε i,j με $1\le i\le \nu$ και $1 \le j \le \mu$

Συμβολισμός: Ο συμβολισμός $A=(\alpha_{ij})_{\nu\times\mu} \in F^{\nu\times\mu}$ συχνά θα απλοποιείται σε $A=(\alpha_{ij}) \in F^{\nu\times\mu}$

Ορισμός: Ένας πίνακας $A \in F^{\nu\times\mu}$ λέγεται τετραγωνικός αν $\nu=\mu$.

π.χ. Ο πίνακας $[1,2,3]$ δεν είναι τετραγωνικός γιατί έχει μία γραμμή και τρεις στήλες ενώ $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & \pi \end{bmatrix} \in R^{2\times2}$ είναι τετραγωνικός.

Ορισμός: Έστω $A=(a_{ij}) \in F^{\nu \times \nu}$. Τα στοιχεία $\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{\nu\nu}$ λέγονται στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του A.

πχ. Τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ είναι τα $\alpha_{11}=0$, $\alpha_{22}=-1$